Wie maches de die Lehrerslüt?

Beim Experimentieren mit Körperabwicklungen haben Schülerinnen und Schüler einer sechsten Klasse ihr Vorstellungsvermögen trainiert. Jetzt kommt das Projekt zu seinem – recht mathematischen – Ende. Erfahren Sie auch, was einem Lehrer dabei so durch den Kopf geht. **Von Werner Jundt und Hansruedi Hediger.**

3/3

«Was bisher geschah»

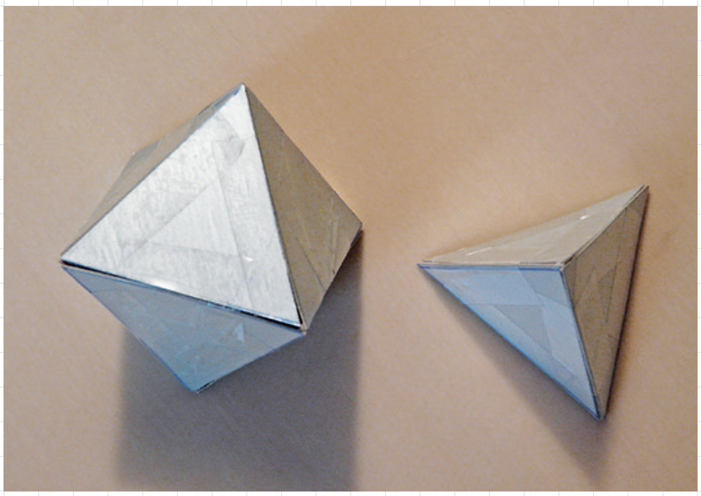
(profil 2/18; nachzulesen auf profil-online.ch)

Erinnern Sie sich, liebe Leserin, lieber Leser, noch an Leos Behauptung aus der vorletzten Stunde? Die Sechstklässlerinnen und Sechstklässler hatten Körper aus Dreiecken gebaut. Als neben Tetraeder und Oktaeder noch ein 6- und ein 10-Flächer aufgetaucht waren, äusserte Leo sich überzeugt: «Um einen Körper zu bauen, braucht man eine gerade Anzahl Seitenflächen!» Es war mir klar, dass dies eine Steilvorlage zu Überlegungen zur Mathematik als Wissenschaft war – und dann verpasste ich doch die Gelegenheit, darauf einzugehen. Diese Option ist noch offen; ich will sie heute gleich zu Beginn nutzen.

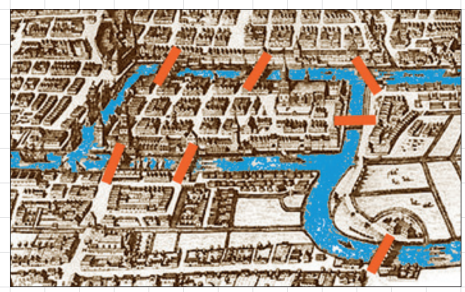
Mathematik – was ist das?

Auf dem grossen Bildschirm über der Wandtafel sind ein Tetraeder und ein Oktaeder zu sehen. «Das waren zwei von den ersten Körpern mit dreieckigen Seitenflächen, die ihr in der vorletzten Stunde gefunden habt», beginne ich. «Vom einen kennt ihr den Namen.» – «Tetraeder, der rechts», meldet sich Julia. «Ja», bestätige ich, «der mit den 4 Flächen. Das andere ist ein Oktaeder und hat 8 Flächen. Allgemein heissen Körper mit eckigen Seitenflächen ‹Polyeder›» – ich schreibe den Begriff an die Wandtafel. «Wir hatten dann noch einen 6-Flächer, und ein Mädchen – ich glaube, es war Francine – hat einen Ufo-förmigen Körper mit 10 Flächen gebaut. Und dann hat Leo etwas Interessantes gesagt. Wisst ihr noch?» Niemand erinnert sich, nicht einmal Leo selbst. «Leo hat gesagt: ‹Es geht nur mit einer geraden Flächenzahl.› – Seht ihr, so entsteht Mathematik: Jemandem fällt eine Gesetzmässigkeit auf, ein Muster. Er oder sie behauptet etwas; und dann wird versucht, diese Behauptung zu beweisen oder zu widerlegen. Würde jemand einen Körper mit einer ungeraden Anzahl dreieckiger Flächen vorlegen, wäre Leos Behauptung widerlegt. Da erinnert sich Julia: «Wir haben ein Haus gebaut, das hatte 7 Flächen!» In der Gruppenarbeit hat sie die Abwicklung eines dreieckigen Hauses auf das Poster gezeichnet. Ich erkenne, wie falsch es war, dass ich damals auf Leos Behauptung nicht sofort eingegangen bin. Zudem wird mir eine Schwachstelle in der Planung der Gruppenarbeit bewusst. Auf den Protokollblättern haben die Lernenden die Anzahl Ecken, Kanten und Flächen der gebauten Körper festgehalten, aber nicht zwischen dreieckigen und quadra-

„Wir haben ein Haus gebaut, das hatte 7 Flächen!



Oktaeder und Tetraeder



Königsberger Brückenproblem

tischen Flächen unterschieden. Mit dieser Ergänzung hätten sie jetzt Leos Behauptung mithilfe der Protokolle ausdiskutieren können. Chance verpasst! – Dann muss ich halt mit weniger zufrieden sein. «Wie sah euer Haus aus?», frage ich Julia. «Der Boden war dreieckig, viereckige Wände und ein Dach mit einem Spitz», antwortet sie. «Könnt ihr euch das vorstellen?», frage ich, wiederhole die Beschreibung und verdeutliche sie mit Handbewegungen. «Wie viele Flächen sind das?» – «Sieben», höre ich mehrfach. «Genau», bestätige ich, «nur: Julias Haus passt nicht zu Leos Behauptung. Damals habt ihr Körper ausschliesslich aus Dreiecken gebaut. Das Haus aus der Gruppenarbeit hat aber viereckige Wände. Wenn man nur Dreiecke zulässt, stimmt Leos Behauptung.» – Die Chance ist definitiv verpasst; das ist nicht überzeugend zu retten. Ich wechsle das Thema.

«Als ihr letztes Mal die Flächen-, Ecken- und Kantenzahlen der gebauten Körper protokolliert habt, konnte ich sehr rasch erkennen, wenn eine Zahl falsch war. Dabei hat mir eine Regel geholfen, die Leonhard Euler vor bald 300 Jahren entdeckt und bewiesen hat. Ich projiziere ein Porträt von Leonhard Euler und erzähle ein paar wissenswerte biografische Details; dass er in Basel aufwuchs und mit 20 Jahren Mathematikprofessor in der russischen Hauptstadt Petersburg wurde. «Schon früh erblindete er auf dem einen Auge, später war er ganz blind. Dennoch schuf er ein immenses mathematisches und physikalisches Werk. Leonhard Euler ist einer der bedeutendsten und einflussreichsten Mathematiker aller Zeiten. Ich werde sein Bild in den Zeitfries an der Wand hängen, dort im 18. Jahrhundert, neben der Dampfmaschine. Bei einigen der hochkomplizierten Probleme, die Euler untersucht hat, kann man schon an einfachen Beispielen zeigen, worum es geht, zum Beispiel bei diesem.»

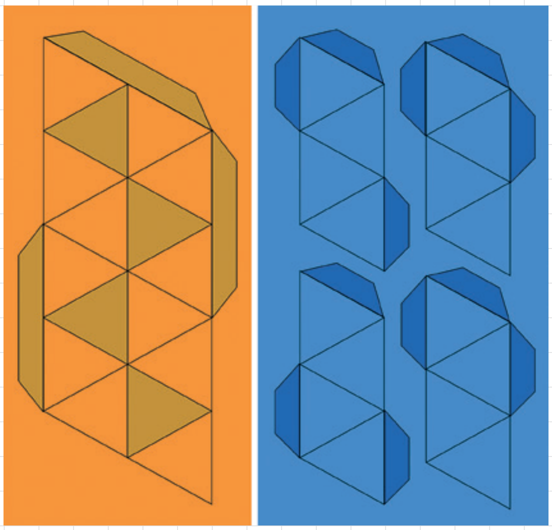
Ich projiziere die Skizze einer Stadt mit einem Fluss, zwei Inseln und Brücken. «Der Plan zeigt die Stadt Königsberg mit den 7 Brücken. Euler stellte die Frage, ob es möglich sei, einen Spaziergang über alle Brücken zu machen, ohne eine Brücke mehrmals zu betreten.» Ich warte. Hände kreisen, Zeigefinger wandern durch die Luft. «Ich hab's!» ruft Sonja. «Komm, zeig's», fordere ich sie auf. Sie greift zum Zeigestab, fährt vor dem Bildschirm hin und her, hält inne und meint enttäuscht: «Nein, geht nicht.» Jetzt will Tarek es versuchen, scheitert aber auch. «Ihr müsst nicht weiter probieren – Euler hat bewiesen, dass es nicht geht. Und er hat nicht nur dieses Beispiel untersucht, sondern gleich für alle möglichen Brückenzahlen und -Anordnungen gezeigt, wann es einen Rundweg gibt und wann nicht. – Aber nun zum Zusammenhang zwischen Ecken-, Flächen- und Kantenzahlen. Da gibt es ein Gesetz, das auch Leonhard Euler entdeckt und bewiesen hat und das so einfach ist, dass ihr es selbst herausfindet. Ich habe eure Protokollblätter korrigiert …» – Tarek passt nicht auf. Er studiert immer noch am Brückenproblem herum. «Tarek, es geht wirklich nicht. Euler hat es bewiesen.» Das überzeugt den Jungen wenig. Ich lösche das Bild auf dem Schirm – Tarek ist zu Recht enttäuscht. Vielleicht war das mit den Königsberger Brücken an dieser Stelle doch nicht die beste aller Ideen. Jetzt ist aber dringend Arbeit für alle angesagt!

Polyedersatz und Keplerstern

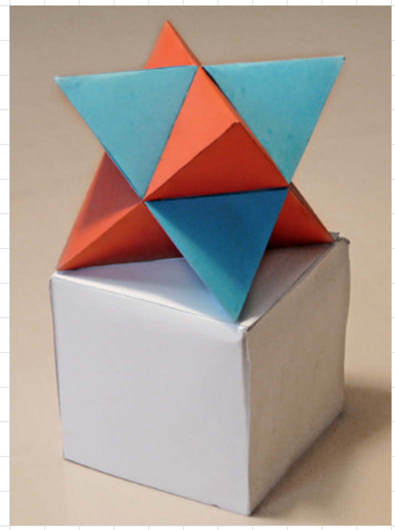
«Ihr könnt selbst herausfinden, wie man aus der Flächenzahl und der Eckenzahl die Kantenzahl berechnen kann. Mithilfe der korrekten Beispiele auf den korrigierten Protokollblättern findet ihr die Regel. Dann könnt ihr die falschen verbessern. Wer's hat, ruft mich. Nachher könnt ihr vorne zwei Ausschneidebogen mit Tetraederabwicklungen holen. Der eine Bogen ergibt ein grosses Tetraeder, der andere 4 kleine. Es hat beide Vorlagen in 6 Farben. Nehmt zwei verschiedene Farben. –

”

Wie berechnet man die Kantenzahl?



Ausschneidebogen für Keplerstern (zu finden im Downloadbereich: **profil-online.ch/dbox/318.2**)



Keplerstern

Und denkt daran, vor dem Falten mit der Schere vorzuritzen.» Ich teile jedem Schüler und jeder Schülerin eine korrigierte Kopie des Protokollblattes aus der Gruppenarbeit der letzten Stunde aus. Dann lege ich vor der Wandtafel die Ausschneidebogen nach Farben sortiert auf den Boden. An die Tafel schreibe ich: «Wie berechnet man aus der Flächenzahl und der Eckenzahl die Kantenzahl?» Schon nach ein paar Minuten melden sich die ersten Jugendlichen, welche die Polyederregel gefunden haben. Ich erinnere sie daran, dass sie jetzt die falschen Beispiele auf den Protokollblättern verbessern sollen. Vorübergehend wird's etwas unruhig – auch wegen der einsetzenden praktischen Arbeit. – Als alle Protokollblätter verbessert sind, unterbreche ich: «Ihr habt die Regel gefunden, mit der man aus der Anzahl Flächen und Ecken die Kanten berechnen kann. – Ja, Roy?» – «Zusammenzählen minus 2!», sagt Roy und formuliert auf mein Nachhaken das Ganze noch ein wenig ausführlicher: «Ich zähle Flächen und Ecken zusammen und rechne minus 2, und das ist dann die Kantenzahl.» – «Diese Regel heisst Polyedersatz, weil sie für alle Polyeder gilt.» Ich teile das zugehörige Merkkärtchen aus. Auf der Vorderseite steht neben einem Porträt von Euler der Begriff «Polyedersatz». Auf der Rückseite ist der Zusammenhang aufgeführt. «Ihr müsst bei diesem Kärtchen nichts mehr ergänzen», sage ich. Aber merkt euch die Regel gleich! Ihr habt sie ja beim Verbessern der falschen Beispiele gerade ein paarmal gebraucht.» Die verbleibenden Minuten bis zur Pause wird noch ausgeschnitten und zum Teil schon gefaltet und geklebt.

Das Gelernte überprüfen

Mit der Lernkontrolle in der Abschlussstunde möchte ich überprüfen, ob die Lernenden

› sich aufgrund von Abwicklungen Körper vorstellen können,
› den Zusammenhang zwischen Flächen-, Ecken- und Kantenzahlen an konkreten Beispielen nachweisen können.

Die Aufgaben beschränken sich auf Körper mit quadratischen und dreieckigen Seitenflächen; es sind ja vorgängig auch nur solche untersucht worden. Die Lernkontrolle finden Sie im Downloadbereich: **profil-online.ch/dbox/318.3**).

Bevor ich die Aufgabenblätter austeile, bitte ich die Schülerinnen und Schüler, mit Arbeiten zuzuwarten, da ich noch Informationen ergänzen würde. Dann teile ich die beiden Aufgabenserien alternierend aus und erkläre: «Bei den ersten beiden Aufgaben findet ihr Figuren, die wie Abwicklungen aussehen, aber keine sind. Sie haben je genau eine Fläche zu viel oder zu wenig. Die überschüssigen streicht ihr durch, die fehlenden ergänzt ihr.» – «Muss man genau zeichnen?», fragt Achim. – «Du kannst skizzieren; entscheidend ist, dass die Flächen am richtigen Ort sind», antworte ich und fahre fort: «Bei der dritten und vierten Aufgabe geht es um Beispiele zum Polyedersatz. Wer mit den Aufgaben fertig ist, baut an den Tetraedern weiter». Die Jugendlichen arbeiten konzentriert.

Nach zwanzig Minute, sind die ersten fertig, geben ab und nehmen die angefangene Falt- und Klebearbeit hervor. Schon bald hat Sven die 5 Tetraeder gebaut. «Auf der Fensterbank siehst du, was du aus den Teilen bauen kannst.» Dort habe ich einen Keplerstern platziert, samt einer dazu passenden Hülle. «Für die Hülle nimmst du ein weisses Blatt aus dem Schrank», sage ich ihm noch. Diejenigen, die später fertig werden, können bei Sven erfahren, wie's weitergeht.

Allen reicht die Zeit, um die Aufgaben der Lernkontrolle in Ruhe zu lösen. Manche beenden auch schon den Stern. Das Thema ist abgeschlossen, wir sind angekommen. Fürs Erste. Späterer Unterricht wird auf dem jetzt Gelernten aufbauen. Irgendeinmal werden wir vielleicht die Keplersterne hervornehmen und fragen: «Gilt Eulers Polyedersatz auch hier?» – Aber das gehört zu einer anderen Geschichte. ■